PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

E.N.S.I. PROGRAMME P

I

Soit a une constante réelle strictement positive et $\mathfrak{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. A tout réel θ, on associe le point M de $\mathfrak{P}$ défini par

$$\overrightarrow{OM} = a\,[(\theta - \sin\theta)\,\vec{i} + (1 - \cos\theta)\,\vec{j}]$$

Lorsque θ parcourt $\mathbf{R}$ (corps des réels), M décrit une courbe Γ appelée cycloïde. Lorsque θ parcourt le segment $[0, 2\pi]$ de $\mathbf{R}$, le point M décrit une arche de cycloïde notée Γ_0.

1° Représenter soigneusement Γ_0 et Γ.

2° Pour tout reel a $(a > 0)$, existe-t-il une courbe γ du plan $\mathfrak{P}$ telle que O appartienne à γ et que, pour tout point P de γ, l'ordonnée y de ce point et la longueur s de l'arc OP vérifient

$$s^2 = 4ay \quad ?$$

(on pourra utiliser un paramètre φ tel que $y = a \sin^2 \varphi$).

II

Soit x un nombre réel positif, m un entier positif. On définit deux fonctions de x par les égalités

$$F_m(x) = \int_0^x \cos^m x\,dx \,, \qquad G_m(x) = \int_0^x \sin^m x\,dx$$

1° Trouver une relation de récurrence donnant $F_{m+2}(x)$ lorsqu'on connaît $F_m(x)$, une autre donnant $G_{m+2}(x)$ lorsqu'on connaît $G_m(x)$.

2° Utiliser ces relations de récurrence pour calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx \,, & I'_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx \\ J_m = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^m x\,dx \,, & J'_m = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^m x\,dx \\ K_m = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^m x\,dx \,, & K'_m = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^m x\,dx \end{cases}$$

On distinguera le cas où m est pair $(m = 2p)$ de celui où m est impair $(m = 2p + 1)$. On rassemblera les résultats dans un tableau.

III

1° Exprimer, en fonction de a, la longueur de l'arche de cycloïde Γ_0.

2° Exprimer, en fonction de a, l'aire du domaine Δ compris entre Γ_0 et l'axe $(O ; \vec{i})$.

3° **Une certaine masse est répartie uniformément sur l'arche de cycloïde Γ_0, avec une densité (masse par unité de longueur) égale à l'unité.**

***a.* Trouver le centre d'inertie de cette répartition de masse.**

***b.* Trouver son moment d'inertie par rapport à l'axe $(O ; \vec{i})$.**

4° Une certaine masse est répartie uniformément sur le domaine Δ défini à la question n° 2, avec une densité (masse par unité de surface) égale à l'unité.

a. Trouver le centre d'inertie de cette répartition de masse.

b. Trouver son moment d'inertie par rapport à l'axe $(O ; \vec{i})$.

5° On considère le corps de révolution obtenu en faisant tourner l'arche de cycloïde Γ_0 autour de l'axe $(O ; \vec{i})$.

a. Trouver le volume de ce corps de révolution.

b. Une certaine masse est répartie uniformément dans ce corps de révolution avec une densité (masse par unité de volume) égale à l'unité. Trouver son moment d'inertie par rapport à l'axe $(O ; \vec{i})$.

IV

On considère un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, associé à un espace vectoriel euclidien orienté U. Soit $\vec{E}$ et $\vec{B}$ deux éléments donnés de U. On considère un point mobile M, dans $\mathcal{E}$, dont le mouvement obéit à chaque instant t à l'équation :

$$\vec{\gamma} = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}, \tag{1}$$

$\vec{V}$ désignant la vitesse de M et $\vec{\gamma}$ son accélération à l'instant t. On rapporte $\mathcal{E}$, à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par (x, y, z) les coordonnées de M et par (u, v, w) les coordonnées de $\vec{V}$, à l'instant t.

1° On considère le cas particulier suivant : E et B étant deux constantes réelles positives, $\vec{E} = E\vec{k}$ et $\vec{B} = B\vec{k}$.

Soit α un nombre réel positif donné.

A l'instant 0, le mobile occupe la position M_0 : $\overrightarrow{OM_0} = \frac{\alpha}{B}\vec{i}$ et son vecteur vitesse $\vec{V}_0$ est défini par $\vec{V}_0 = -\alpha\vec{j}$.

a. Exprimer u, v, w en fonction de t; puis déterminer le mouvement de M. On précisera avec soin les propriétés géométriques et cinématiques de la trajectoire.

b. Quelle est la longueur de l'arc de cette trajectoire, parcouru par M, entre l'instant 0 et un instant t quelconque?

2° On considère un second cas particulier : $\vec{E} = E\vec{j}$ et $\vec{B} = B\vec{k}$. A l'instant 0, le mobile est en O et sa vitesse est nulle. Trouver les expressions de u, v, w, x, y, z en fonction de t. On indiquera d'une manière précise la nature géométrique de la trajectoire.

3° B, E et ω désignant des constantes positives, on considère un mouvement ponctuel dans $\mathcal{E}$ tel, qu'à tout instant, le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ vérifient :

$$\vec{\gamma} = E \sin \omega t \vec{j} - B\vec{V} \wedge \vec{k} \tag{2}$$

On suppose qu'à l'instant 0, le mobile est en O et que sa vitesse est nulle.

Trouver les expressions de u, v, w, x, y, z en fonction de t.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail